Técnicas para problemas de desigualdades

Notas extraídas del libro de Arthur Engel [1]

11 de diciembre de 2020

En esta sesión nos centramos en los problemas donde aparecen desigualdades entre números. Algunos de estos problemas se pueden resolver de un modo casi trivial sin más que aplicar algunas de las técnicas que veremos aquí, sin embargo otros problemas de desigualdades necesitarán de un empleo más audaz del contenido de esta sesión y, por supuesto, de nuestra experiencia, tenacidad y madurez a la hora de resolver problemas matemáticos.

1. Medias

Comenzamos con dos de las desigualdades más básicas pero al mismo tiempo más importantes. Sean $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reales, entonces

$$x^2 \geq 0 \tag{1}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0. \tag{2}$$

La igualdad se da en ambas sólo cuando $x = 0$ en (1) o $x_i = 0$ para todo i en (2).

Una de las estrategias más simple y fructífera a la hora de resolver problemas de desigualdades consiste en **transformar nuestras desigualdades** en alguna de las formas (1) o (2). Este proceso no es simple, por lo que conviene conocer otras desigualdades de aspecto más complejo pero que básicamente se reducen a las anteriores. Sea $x = a - b$ con $a > 0$ y $b > 0$, entonces se tiene la siguiente secuencia de equivalencias:

$$(1) \iff a^2 + b^2 \geq 2ab \iff \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \iff \text{(haciendo } y = a/b\text{)}\ y + \frac{1}{y} \geq 2,\ y > 0$$

$$\iff 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \iff \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

De este modo podemos ver cómo nuestras inofensivas desigualdades de partida empiezan a tomar aspectos más aterradores, pero ¿qué tal si reemplazamos a y b por $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$?

$$(1) \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$$

A partir de aquí se deduce la siguiente secuencia de desigualdades que resultarán fundamentales. Estas desigualdades reciben el nombre de *desigualdades de las medias armónicas-geométricas-aritméticas-cuadráticas* o desigualdades HM-GM-AM-QM:

Desigualdades de las medias:

$$\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b).$$

Reconocer las desigualdades anteriores bajo cualquier situación que puedan aparecen en los distintos problemas puede ser una gran ventaja a la hora de resolverlos. Los siguientes ejemplos ilustran lo que acabamos de decir:

Ejemplo 1. $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ para todo x.

Ejemplo 2. Si $a, b, c \geq 0$ entonces $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Ejemplo 3. Si $a_i > 0$ para $i = 1, \cdots, n$ y $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n.$$

La desigualdad HM-GM-AM-QM se tiene incluso en la siguiente versión más general. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$, entonces

$$\min(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leq \max(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

La siguiente desigualdad es conocida como **la desigualdad de Nesbitt**: sean a, b, c números no negativos, entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Es útil saber que el término de la izquierda, que denotaremos por $f(a,b,c)$, se puede reescribir de las siguientes maneras:

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = (a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}) - 3;$$

$$\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)](\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}) - 3. \qquad (3)$$

A continuación ofrecemos dos pruebas de la desigualdad de Nesbitt:

1. Sean $x = a+b$, $y = b+c$ y $z = a+c$, entonces

$$\begin{aligned} 2f(a,b,c) &= (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - 6 \\ &= \underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{x}{z}+\frac{z}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}_{\geq 2} - 3 \geq 3 \end{aligned}$$

2. Ahora demostraremos la desigualdad de Nesbitt usando la desigualdad entre las medias aritméticas y armónicas aunque primero deberemos transformarlas para poder aplicar (3):

$$\frac{u+v+w}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}} \iff (u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) \geq 9.$$

Por tanto, $f(a,b,c) \geq \frac{1}{2}\cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$.

Igualdades. Un problema muy interesante y que sirve para resolver ecuaciones en lugar de inecuaciones es estudiar cuándo las desigualdades anteriores son igualdades. En el caso de las desigualdades de medias, estas son igualdades si, y sólo si, todos los números son iguales.

2. Desigualdad triangular

Otro tipo de desigualdades de gran interés son las que se pueden asociar con las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo. La desigualdad triangular suele tomar los siguientes aspectos equivalentes (se supone que a, b y c representan las longitudes de los lados de un triángulo):

1. $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$.

2. $a > |b-c|$, $b > |a-c|$, $c > |a-b|$.

3. $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$.

Por supuesto no toda terna (x,y,z) de números reales positivos se corresponde con los lados de un triángulo, sin embargo sí que a toda terna le puede asociar otra (a,b,c) que sí se corresponde con los lados de un triángulo. Basta con aplicar las fórmulas, $a = y+z$, $b = z+x$ y $c = x+y$.

3. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es una de las desigualdades de mayor utilidad en matemáticas. Dados $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dos colecciones de n números reales, entonces

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Una forma fácil de demostrarla es considerar el siguiente polinomio de segundo grado,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix + b_i)^2 = x^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Puesto que $P(x) \geq 0$ para todo número real x, se tiene que el discriminante de la ecuación $P(x) = 0$ es negativo. La desigualdad de Cauchy-Schwarz sigue inmediatamente a partir de aquí.

Una de las aplicaciones más inmediatas de esta desigualdad es la desigualdad entre las medias aritméticas y cuadráticas para n números.

$$(1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

4. Desigualdades de ordenación

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dos colecciones de n números reales y sea $c_1, \cdots, c_n$ una permutación de los números $b_1, b_2, \cdots, b_n$. Nos preguntamos cuáles de las $n!$ posibles sumas del tipo

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots a_nc_n$$

son extremales, es decir, dan la mayor y la menor de todas las posibles sumas. Este problema no es difícil de resolver ya que se puede reducir a estudiarlo para $n = 2$. De hecho, para $n = 2$ tenemos la situación

$$a_1c_1 + a_2c_2 - (a_1c_2 + a_2c_1) = (a_1 - a_2)(c_1 - c_2),$$

donde se puede apreciar que, si $a_1 \geq a_2$, esta diferencia es la mayor posible si $c_1 \geq c_2$. El resultado general dice que la suma $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ es la mayor posible si ambas colecciones están ordenadas de modo creciente o decreciente, mientras que la suma es la menor posible si una colección se ha ordenado de modo creciente mientras que la otra se ha hecho de modo decreciente. Este resultado es fácil de visualizar si supones que puedes elegir entre billetes de 50, 20 y 10 euros y que puedes elegir 4, 3 y 2 de cada tipo. Obviamente la mayor cantidad se obtendrá si elegimos cuatro billetes de 50, 3 de 20 y 2 de 10.

Las siguientes desigualdades se pueden obtener como una aplicación de las desigualdades de ordenación:

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ para cualesquiera números reales.

2. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$ para cualesquiera números positivos.

Otra aplicación de las desigualdades de ordenación son **las desigualdades de Chebyshev**. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dos colecciones de n números reales ordenadas de igual modo, o bien creciente o decrecientemente, entonces

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n \\
&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots a_nb_1 \\
&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n \geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots a_nb_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sumando todas estas desigualdades, se obtiene

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

de donde se deduce inmediatamente la primera desigualdad de Chebyshev para colecciones de números con igual orden:

Desigualdad de Chebysev:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Si se repite el mismo razonamiento pero partiendo de dos colecciones de números reales ordenadas una decreciente y a la otra crecientemente, se llega a la desigualdad de Chebyshev para colecciones de números de orden contrarios:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Otra desigualdad que se puede obtener a partir del principio de ordenación es la desigualdad de Nesbitt. Inténtalo.

Ejercicio. Encuentra el mínimo de $\dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos x} + \dfrac{\cos^3 x}{\text{sen} x}$ para $0 < x < \pi/2$.

5. Igualdades de triángulos

Si a, b y c son los lados de un triángulo, α, β y γ son, respectivamente, sus ángulos opuestos, A su área y R su circunradio, entonces se tienen las siguientes desigualdades:

Igualdad del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Igualdad del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R.$$

Fórmula para el área:

$$A = \frac{1}{2}ab\mathrm{sen}\gamma = \frac{1}{2}bc\mathrm{sen}\alpha = \frac{1}{2}ac\mathrm{sen}\beta.$$

Estas igualdades suelen ser muy útiles cuando se trata de probar relaciones entre distintos elementos de un triángulo

6. La desigualdad de Jensen

Esta desigualdad nos permite dar una desigualdad entre una media aritmética y su imagen mediante una función convexa (es decir, de segunda derivada positiva). Sean $a_1, \cdots, a_n$ n números reales y f una función convexa, entonces

$$\boxed{f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n}.}$$

Esta desigualdad admite una expresión más general. Sean $t_1, t_2, \cdots, t_n$ número entre 0 y 1 y tales que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$, entonces, si f es convexa,

$$\boxed{f(t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + \cdots + t_nf(a_n).}$$

Si la función f es cóncava entonces se tiene la desigualdad contraria.

$$\boxed{f(t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n) \geq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + \cdots + t_nf(a_n).}$$

Dos técnicas muy prácticas: simetría y homogeneización.

Es bastante habitual que una desigualdad dada sea equivalente a otra desigualdad que, al menos en apariencia, es más simple. No hay una técnica general que se pueda aplicar de modo universal para lograr este objetivo, sin embargo sí hay ocasiones en que, si miramos muy atentamente nuestra desigualdad, se pueden aplicar ciertas técnicas que ayuden a simplificarla. Esto ocurre, por ejemplo, cuando la desigualdad de partida tiene rasgos de simetría entre sus variables (es decir, la posición de las distintas variables no cambia la desigualdad) o bien de homogeneización (todos los sumandos son del mismo grado polinomial). Veamos algunos ejemplos:

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ es homogénea (todos los términos son de grado 2) y simétrica (si (a, b) es solución entonces (b, a) también lo es).

2. $ab + b^2 \geq 0$ es homogénea pero no simétrica ($(-1, 10)$ es solución pero $(10, -1)$ no lo es).

Las simplificaciones que podemos hacer en estos casos son: si la ecuación es simétrica entonces podemos suponer que las variables están ordenadas de menor a mayor ($a \leq b \leq$

$c \leq \cdots$); si la ecuación es homogénea entonces se puede multiplicar por un factor que haga el problema más simple. Por ejemplo, probemos que

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

es cierto para a, b y c positivos. Bien, es fácil ver que la desigualdad es simétrica y homogénea. Por tanto podemos suponer que $a \leq b \leq c$ y que (multiplicando por $1/a^3$) obtenemos una nueva ecuación donde $a = 1$ e introducimos las nuevas variable $x, y \geq 0$ tales que $b = 1 + x$ e $y = 1 + y$, de este modo pasamos de una desigualdad en tres incógnitas a otra en dos incógnitas. A continuación sustituimos, simplificamos y procedemos como se indica:

$$\begin{gathered} x^3 + y^3 + x^2 + y^2 \geq x^2y + xy + xy^2 \\ \iff x^3 + y^3 + x^2 - xy + y^2 - xy(x+y) \geq 0 \\ \iff x^3 + y^3 + (x-y)^2 + xy - xy(x+y) \geq 0 \\ \iff (x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy) + xy \geq 0 \\ \iff (x+y+1)(x-y)^2 + xy \geq 0. \end{gathered}$$

7. Ecuaciones funcionales

La ecuaciones donde las incógnitas son las funciones reciben el nombre de *ecuaciones funcionales*. Aunque no hay una estrategia unificada para resolverlas, sí hay algunas relaciones funcionales que suelen aparecer mucho en distintos problemas de ingenio matemático. A continuación enumeramos algunas de estas relaciones.

Ecuaciones funcionales de Cauchy. Estas ecuaciones se refieren principalmente a los siguientes tipos de ecuaciones de funciones con dos variables:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $f(x+y) = f(x)f(y)$,
- $f(xy) = f(x) + f(y)$,
- $f(xy) = f(x)f(y)$.

Ecuación funcional de Jensen.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Encontrar todas las soluciones a este tipo de ecuaciones funcionales no siempre es fácil, sin embargo el problema suele ser mucho más atacable si se piden condiciones adicionales como monotonía, continuidad o ciertas condiciones puntuales sobre las soluciones.

Ejemplo 1. Nos proponemos encontrar todas las soluciones a la ecuación

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

para todo x, y en el dominio de f y sabiendo que 0 está en el dominio de f. En este caso, podemos hacer $y = 0$ y tenemos que

$$f(0) = f(x) + f(0)$$

para todo x en el dominio de f y, por tanto, $f \equiv 0$. Es decir, esta ecuación tiene una única solución que es la función idénticamente igual a cero.

Ejercicio 1. *Sobre la misma ecuación funcional anterior suponemos ahora que los números -1 y 1 están en el dominio de f, deduce que el dominio de f es simétrico respecto al origen (es decir, si f está definida en x entonces también lo está en $-x$) y que toda solución debe ser par (es decir, necesariamente $f(-x) = f(x)$).*

¿Cómo serán las funciones que verifican la relación $f(x + y) = f(x) + f(y)$? En general pueden ser muy raras pero ¿qué ocurre si pedimos que su dominio sea toda la recta real, por ejemplo?

Lo primero que observamos es que si hacemos $y = 0$, entonces $f(x) = f(x) + f(0)$ por tanto que $f(0) = 0$. Tomando $y = -x$ además obtenemos que $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, es decir, que nuestra función es impar y por tanto que basta con estudiarla para $x > 0$.

Si hacemos $y = x$ además tenemos que $f(2x) = 2f(x)$, de donde se deduce, utilizando la relación funcional que debe satisfacer la función, que $f(nx) = nf(x)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que x es racional y por tanto que $x = \frac{m}{n}$. En particular tenemos que $n \cdot x = m \cdot 1$ y, por lo anterior, $f(nx) = f(m)$ y $nf(x) = mf(1)$, de donde

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si hacemos $f(1) = c$ entonces acabamos de probar que $f(x) = c \cdot x$ para todo x racional.

Comentario 1. A partir de lo anterior, y conociendo con cierta profundidad las propiedades de la recta real, es fácil deducir que si f es continua o monótona entonces $f(x) = cx$ para todo x real.

Ejercicio 2. *Encuentra todas las funciones monótonas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tales que*

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

para todo x e y reales.

Ejercicio 3. *Encuentra todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tales que*

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

para todo x e y reales.

Ayuda: Buscamos soluciones que no sean idénticamente cero. Prueba que tal función debe mandar números positivos a números positivos y considera la función $g(t) = \log(f(e^t))$. Prueba que $g(s + t) = g(s) + g(t)$.

Ejercicio 4. *(Shortlist IMO'04) Considera las funciones* $f\colon \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ *y tales que:*

1. *Para todo* x *e* y, $f(xy) = f(x)f(y)$.

2. $f(30) = 1$.

3. *Para todo* n *con último dígito igual a* 7, $f(n) = 1$. *La función idénticamente igual a* 1 *es una solución, pero ¿es la única? Si no, determina todas las soluciones posibles.*

Ejercicio 5. *Determina todas las funciones* $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que* $f(x+y) = g(x)+h(y)$.

Ejercicio 6. *Prueba que si existe una constante* a *tal que para todo* x

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

entonces f *es una función periódica, es decir, existe* b *tal que* $f(x+b) = f(x)$ *para todo* x.
Ayuda: Estudia el valor de $f(x+2a)$.

Ejercicio 7. *Determina todas las funciones continuas tales que* $f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x)+f(y)]$.
Ayuda: Prueba que para x *racional* $f(x) = cx^2$.

Referencias

[1] Arthur Engel, Problem-solving strategies, Springer-Verlag 1998.

[2] Página web Olimpiada Matemáica Española:
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/$_c sanchez/loc2005.html$

1. Dados a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ entonces

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

2. Dados a, b, c números positivos, muestra que

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

3. Probar que

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}.$$

4. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\frac{1}{a+b+c-2} = 1.$$

+

Problema fase local 2017.

5. Sean $a, b > 0$ tales que $a + b = 1$. Prueba que $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

6. Sean $a, b, c > 0$ tales que $a + b + c = 1$. Prueba que $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$.

7. Sean x, y, z tres números positivos. ¿Es alguna de las siguientes desigualdades cierta?

a) Si $x + y + z \geq 3$ entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$.

b) Si $x + y + z \leq 3$ entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.

Justifica tu respuesta si es negativa y da una demostración si es positiva.

Problema fase local 2005. Indicación: una es afirmativa y otra negativa. Para la afirmativa, razona utilizando desigualdades HM y AM.

8. Prueba que para cualesquiera a, b con $0 < a, b < 1$ se tiene que

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} \leq \sqrt{2}.$$

Fase nacional 2008. Indicación: Aplicar la desigualdad de medias geométricas-aritméticas para tres factores.

9. Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

Fase local 2005.

10. Probar las desigualdad

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{b+a} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

11. Dados a, b, c números positivos tales que $a + b + c = 1$, prueba que

$$a^{a^2+2ac} b^{b^2+2ba} c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

Problema fase local 2008. Indicacióón: aplicar desigualdad tipo Jensen.

12. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Problema fase nacional 2009.

13. Hallar todas las ternas (x, y, z) de números reales que resuelven la ecuación:

$$\sqrt{3^x(5^y + 7^z)} + \sqrt{5^y(7^z + 3^x)} + \sqrt{7^z(3^x + 5^y)} = \sqrt{2}(3^x + 5^y + 7^z).$$

Problema fase local 2008.

14. Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1.$$

Problema fase local 2007.

Las soluciones a los problemas de olimpiadas se pueden encontrar en [2].